Vektoren

- Betrag

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $|\vec{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{\text{Skalarprodukt}}}$

- Addition

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

- Skalarmultiplikation

$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

- Kollineare Vektoren

$\vec{b} = s \cdot \vec{a}$ → kollinear / linear abhängig

$\vec{b} \neq s \cdot \vec{a}$ → linear unabhängig

$s \in \mathbb{R}$

- Differenzvektor

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

- Gegenvektor

$-\vec{a}$ ist Gegenvektor von $\vec{a}$

- Nullvektor

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Linearkombination / Vektorzug

$\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

Vektoren

- Skalarprodukt

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}$$

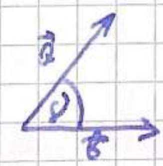
$\to \in \mathbb{R}$

→ Kommutativ
→ Assoziativ — Gesetz
→ Distributiv

- Winkel zwischen Vektoren

$$\boxed{\cos(\gamma) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$

„Skalarprodukt durch Betragsprodukt"



- Orthogonale Vektoren

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}}$$

- Kollineare Vektoren mit gleicher Richtung

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Winkel zwischen Zeug

Gerade – Gerade [Richtungsvektor – Richtungsvektor]
Ebene – Ebene [Normalenvektor – Normalenvektor]
Gerade – Ebene [Richtungsvektor – Normalenvektor]

Lineare Abhängigkeit

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig, wenn ich einen von den als Linearkombination der beiden anderen schreiben kann. ~~ohne dass~~ → $\boxed{\vec{a} = r\vec{b} + s\vec{c}}$

- Oder: wenn $\boxed{r, s, t \neq 0}$ u. $\boxed{\vec{0} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}}$

Spiegelung im Raum

2D

x-Achse	$(x\|y)$	$(x\|-y)$
y-Achse	$(x\|y)$	$(-x\|y)$
Ursprung	$(x\|y)$	$(-x\|-y)$
Winkelhalbierende erster Quadrant	$(x\|y)$	$(y\|x)$

3D

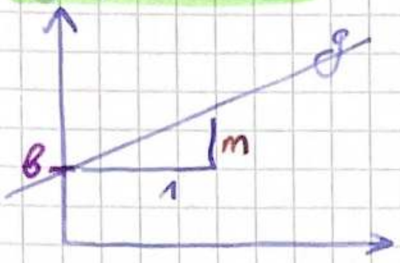
x-Achse	$(x\|y\|z)$	$(x\|-y\|-z)$
y-Achse	$(x\|y\|z)$	$(-x\|y\|-z)$
z-Achse	$(x\|y\|z)$	$(-x\|-y\|z)$
Ursprung	$(x\|y\|z)$	$(-x\|-y\|-z)$
xy-Ebene	$(x\|y\|z)$	$(x\|y\|-z)$
xz-Ebene	$(x\|y\|z)$	$(x\|-y\|z)$
yz-Ebene	$(x\|y\|z)$	$(-x\|y\|-z)$

Geraden im Raum

In der Ebene

Punkt-Steigungsform

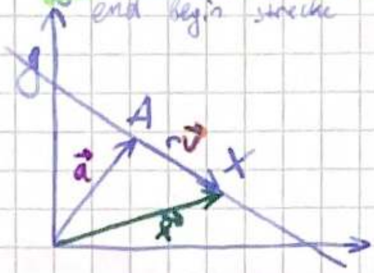
$$g: y = mx + b$$



Punkt-Richtungsform

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in \mathbb{R}$$

end begin strecke



Im Raum

Punkt-Richtungsform

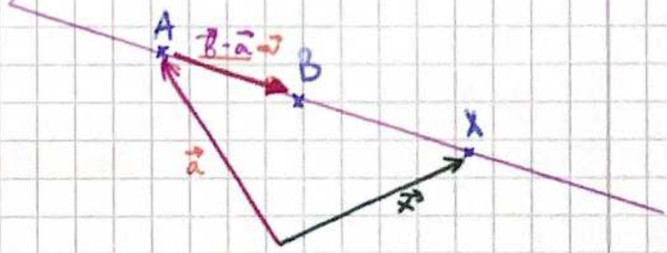
$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v}$$

(gleich wie i.d. Ebene)

Zwei-Punkte-Form durch A u. B

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}), \quad r \in \mathbb{R}$$

end begin $\vec{v}$ aus zwei Punkten



Strecke

$$\vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\boxed{\overline{AB}, \text{ wo } A(2|3) \wedge B(6|1) \Rightarrow \overline{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}, \text{ wo } 0 \leq r \leq 1}$$

Spurpunkte – Punkte auf der Geraden, da wo sie eine Ebene schneidet (eine der Koordinaten $= 0$)

Lagebeziehungen zweier Geraden im Raum

für $\boxed{g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} \quad u. \quad h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}}$

1) Richtungsvektoren $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ kollinear

identisch
jeder P auf g ist auch auf h

parallel
kein P auf g ist auch auf h

2) Richtungsvektoren $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ nicht kollinear

schneiden sich
Schnittpunktsatz
$\boxed{\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + s\vec{v}}$
erfüllt

→ Bestimmung des SPs
→ überbestimmtes Gleichungssystem < 3 Gleichungen, 2 Vars

Gauß-Algorithmus → $\boxed{\text{rref}([\vdots\vdots])}$

→ Diagonalform der Matrix

windschief
SP-Satz nicht erfüllt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$r = -1$
$s = 2$
→ wahre Aussage → $\boxed{\text{SP existiert}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$r + 2s = 0$ → r, s abhängig
→ falsche Aussage → $\boxed{\text{keine Lösung!}}$
→ wahre Aussage → windschief

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$r - 0{,}5s = -1$ → r, s abhängig
→ wahre Aussage
→ wahre Aussage } $\boxed{\text{unendlich viele Lösungen}}$ → identisch

Ebenen im Raum

Parameterform

$\boxed{E: \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}}$ $= \boxed{\vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})}$

Stützvektor

Richtungsvektoren

für Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

(Punkt-Richtungsform)

(Drei-Punkte-Form)

wichtig:
$\vec{u}$ u. $\vec{v}$ dürfen nicht kollinear sein!

Normalenform

$\boxed{E: \vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{q} = 0}$ $\boxed{E: \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{q}}$ $\boxed{E: \vec{n} \cdot \vec{x} = d}$

Punkt $\vec{q}$ irgendwo auf der Ebene

variabler Argument, s.o. $\vec{x}$

Normalenvektor

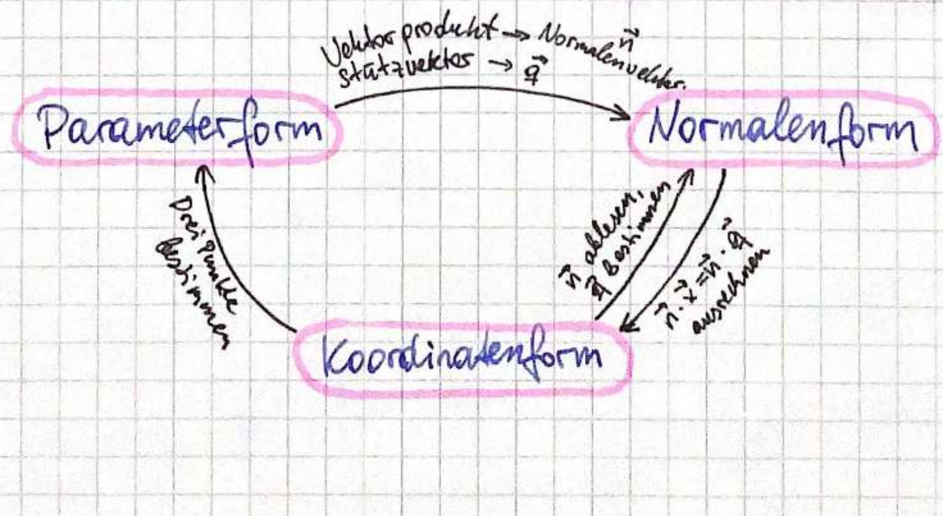
Normalenvektor:
orthogonal zur Ebene,
$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{v} = 0}$

Punktprobe:
Ebenengleichung gleich dem Punkt setzen, Gleichungssystem für x, y, z lösen

Spurpunkte sind Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen. Wenn man die verbindet, erhält man die Spurgeraden

Koordinatenform

$\boxed{ax + by + cz = d}$, wobei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n}$



Geraden im Raum – Weiteres

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 23-32 \\ 31-13 \\ 12-21 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

→ Ergebnis Vektor, der orthogonal zu $\vec{a}$ u. $\vec{b}$

„a kreuz b"

Lagebeziehung Gerade – Ebene

1) Ebene in Koordinatenform oder Normalenform

$$\boxed{g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad u. \quad E: ax + by + cz = d}$$

Einsetzen, r Bestimmen

$$\boxed{a(p_1 + rv_1) + b(p_2 + rv_2) + c(p_3 + rv_3) = d}$$

- Eine Lösung → Schnittpunkt (r einsetzen)
- Keine Lösung → parallel
- ∞ Lösungen → Gerade in Ebene

2) Ebene in Parameterform

$$\boxed{g: \vec{x} = a + t\vec{u} \quad u. \quad E: \vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}}$$

Gleichsetzen

$$\boxed{a + t\vec{u} = b + r\vec{v} + s\vec{w}}$$

→ lineares Gleichungssystem
→ 3 Gleichungen, 3 Variablen

Eine, Keine oder ∞ Lösungen (s.o.)

Lagebeziehung Ebene - Ebene

1) Koordinatenform – Parameterform

$E: ax+by+cz=d$ u. $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Einsetzen, r und s bestimmen

$a(p_1 + ru_1 + sv_1) + b(p_2 + ru_2 + sv_2) + c(p_3 + ru_3 + sv_3) = d$

- Abhängigkeit → Schnittgerade → (r u. s einsetzen)
- keine Lösung → parallel
- ∞ Lösungen, keine Abhängigkeit → identisch

2) Koordinatenform – Koordinatenform

$E: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ u. $F: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

→ lineares Gleichungssystem (LGS) „solve(...=... and ...=...,x,y)"
→ unterbestimmt (zwei Gleichungen, drei Variablen)
→ eine Variable frei gewählt
→ Abhängigkeit, keine, ∞ Lösungen → (s. o.)

3) Parameterform – Parameterform

$E: \vec{x} = \vec{b}_1 + r_1\vec{u}_1 + s_1\vec{v}_1$ u. $F: \vec{x} = \vec{b}_2 + r_2\vec{u}_2 + s_2\vec{v}_2$

Gleichsetzen

$\vec{b}_1 + r_1\vec{u}_1 + s_1\vec{v}_1 = \vec{b}_2 + r_2\vec{u}_2 + s_2\vec{v}_2$

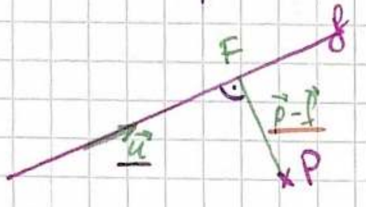
→ lineares Gleichungssystem
→ unterbestimmt (drei Gleichungen, vier Variablen)

- keine Lösung → parallel
- ∞ Lösungen, in Diagonalform in jeder Zeile Einträge → Schnittgerade
- ∞ Lösungen, in Diagonalform eine Zeile aus Nullen → identisch

Abstandsprobleme

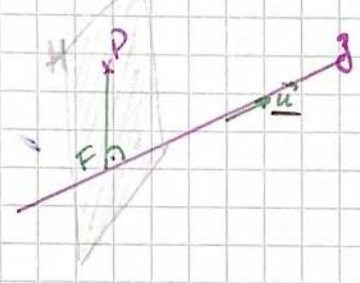
1) Punkt - Gerade

a) Skalarprodukt



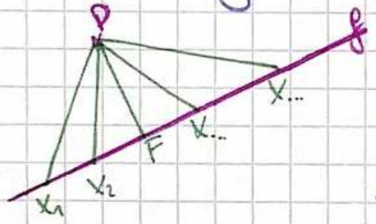
1) $\boxed{(\vec{p}-\vec{f})\cdot\vec{u}=0}$ (Rot → senkrecht) ← kennen wir nicht
2) F bestimmen
3) $\boxed{|\vec{p}-\vec{f}|}$ ausrechnen

b) Hilfsebene



1) H hat $\vec{u}$ als Normalenvektor u. P als Punkt
2) SP von g u. H bestimmen
3) $\boxed{|\vec{p}-\vec{f}|}$ ausrechnen

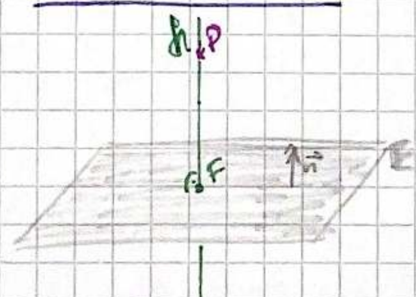
c) Minimierung



1) $\boxed{|\vec{p}-\vec{x}|}$ ist Entfernung zu einem beliebigen P. auf g
2) $\boxed{f(t)=|\vec{p}-\vec{x}|}$
3) Extremstelle, Minimum von $f(t)$ bestimmen → $f'(t)=0$

Parallele Geraden/Ebenen:
wähle einen Punkt auf eines der Geraden/Ebenen und rechne mit ihm (S20)

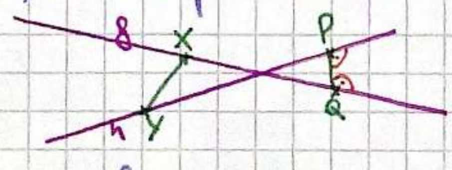
2) Punkt - Ebene



1) h aufstellen: $h=\boxed{\vec{p}+t\cdot\vec{n}}$
2) SP von h u. E bestimmen
3) $\boxed{|\vec{p}-\vec{f}|}$ ausrechnen

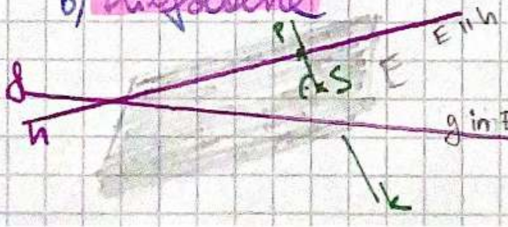
3) Windschiefe Geraden

a) Skalarprodukt



1) $\boxed{\overrightarrow{XY}}$ aufstellen (basierend auf g u. h)
2) $\boxed{\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v}}$ u. $\boxed{\overrightarrow{PQ}\perp\vec{u}}$ (Skalarprodukt)
→ LGS aufstellen + lösen
→ P u. Q finden und $\boxed{|\overrightarrow{PQ}|}$ bestimmen

b) Hilfsebene



1) E aufstellen, was $\boxed{\parallel \text{ zu } h \text{ u. enthält } g}$
2) $\boxed{k}$ durch P u. ⊥ zu E
3) S ist SP von k u. E. $\boxed{|\overrightarrow{PS}|}$ berechnen